Name:____________________Vorname:____________________Matrikel-Nr:____________________Gruppe: B

Teil I: Multiple Choice

Zu jeder Frage ist genau eine richtige Antwortmöglichkeit vorgegeben. Tragen Sie Ihre Lösungen in das Kästchen auf der nächsten Seite ein. Die Rückseite dieses Blattes können Sie für Berechnungen sowie zu Anmerkungen und Erläuterungen ihrer Lösung verwenden.

1. Assistent W. hat seinen Kaffee über das einzige Manuskript von Professor U. geschüttet. Obwohl er rettet, was zu retten ist, sind zwei Zeilen nur noch teilweise zu entziffern:

$$X_n \to X \text{ in Wahrscheinlichkeit} \overset{def}{\Leftrightarrow} \bullet\, \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P[\bullet \; - \; \bullet > \epsilon] = 0.$$
$$\bullet \qquad\qquad X_n \to X \text{ fast sicher}$$

Was stand unter den Flecken:

(a) $\exists \quad (X_n \quad X)^2 \quad \Rightarrow$ (b) $\forall \quad (\bar{X}_n \quad X) \quad \Leftarrow$

(c) $\forall \quad | X_n \quad X | \quad \Leftarrow$ (d) $\forall \quad | X_n \quad X | \quad \Rightarrow$

2. Sei X eine Zufallsvariable auf $\mathbb{R}$ mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Die Aussage $P(| X - \mu | \geq 3\sigma) \leq \frac{4}{81}$ ist:

(a) für Verteilungen mit unimodaler Dichte immer richtig

(b) immer richtig

(c) nur bei einer Normalverteilung richtig

(d) richtig, falls X eine auf **ganz** $\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Dichte besitzt.

3. Sei $X \sim \mathrm{U}(-1.5, 1.5)$. Was ist die Varianz von X?

(a) 1/2 (b) 4/3 (c) 3/4 (d) 2

4. Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y, wobei Y auf $(0,1)$ gleichverteilt ist und X die Werte 0 und 1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annimmt. Wie sieht die Dichte von $Z = XY$ im Bereich $0.25 \leq z \leq 1$ aus?

(a) $f(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0.5 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (b) $f(z) = \begin{cases} 0.5 & \text{für } 0.25 \leq z < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $f(z) = \begin{cases} 0.5 & \text{für } 0.25 < z \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (d) $f(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0.25 < z \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

5. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 $(0 < \sigma^2 < \infty)$. Des weiteren sei $\gamma = \mathrm{E}[| X_1 - \mu |^3] < \infty$, $S_n^* = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$, und Φ bezeichne die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Dann gilt:

$$d(S_n^*, \Phi) \leq \frac{0.8\gamma}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Diese Aussage heißt

(a) Berry-Esséen-Ungleichung (b) Satz von Borel-Cantelli

(c) Chebychev Ungleichung (d) Cramér-Rao-Schranke.

Name:____________________Vorname:____________________Matrikel-Nr:____________________Gruppe: B

6. Beim Lotto werden 6 Zahlen und eine Zusatzzahl aus 49 gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, daß Sie mit einer Tippreihe 5 Richtige und die Zusatzzahl haben, beträgt:

   (a) $\binom{6}{5}\binom{43}{1}/\binom{49}{6}$ (b) $\binom{6}{5}/\binom{49}{6}$ (c) $\binom{6}{5}\binom{42}{1}/\binom{49}{7}$ (d) $\binom{6}{5}/\binom{49}{7}$

7. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für die negative Binomialverteilung mit Parameter p und r ist:

   (a) $\dfrac{(1-p\mu)^r}{(1-pz)^{-r}}$ (b) $p^r(pz-z+1)^{-r}$ (c) $(1-pz)^r(1-p)^N$ (d) $\dfrac{1-p}{1-pz}$

8. Den Schein zur Wahrscheinlichkeitstheorie erhält, wer mindestens 50% der Übungspunkte und eine der beiden Klausuren bestanden hat. Im Wintersemester 93/94 haben 90% der Studierenden die nötigen Übungspunkte erreicht, 60% haben die erste Klausur bestanden. Von denjenigen, die die erste Klausur nicht bestanden haben, waren die Hälfte bei der zweiten Klausur erfolgreich. Studentin A. behauptet nun, daß insgesamt mindestens 70% der Studierenden den Schein erhalten haben, Studentin B meint, es seien mindestens 72%, Student C. sagt, es seien mindestens 27% und Student D. meint, es seien mindestens 85%. Wieviele der Aussagen von A,B,C und D sind richtig?

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

9. Wenn drei Zufallsvariablen X,Y und Z paarweise stochastisch unabhängig sind, können wir daraus folgern, daß

   (a) X, Y und Z stochastisch unabhängig sind;

   (b) X und Y nie dieselben Werte annehmen können;

   (c) die bedingte Verteilung von (X,Y) gegeben $Z=z$ eine Normalverteilung ist;

   (d) Y und Z unkorreliert sind.

10. Ein Student schreibt auch bei der Nachklausur von seiner Nachbarin ab. Da er ihre Schrift nicht immer eindeutig lesen kann, macht er ab und zu Übertragungsfehler, die er auf Grund seiner Unkenntnis des Stoffes nicht erkennt. Nehmen wir an, daß die Anzahl der Fehler pro Seite poissonverteilt mit Parameter $\lambda = 3$ sei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er eine Lösung, die sich über zwei Seiten erstreckt, fehlerfrei abschreibt?

    (a) $2 \cdot \exp(-3)$ (b) $\lambda^2 \dfrac{\exp(-3)}{2!}$ (c) $\dfrac{3}{2}\exp(-3)$ (d) $\exp(-6)$

Antworten:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Verteilungstabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.000	0.5000	0.750	0.7734	1.500	0.9332	2.250	0.9878
0.025	0.5100	0.775	0.7808	1.525	0.9364	2.275	0.9885
0.050	0.5199	0.800	0.7881	1.550	0.9394	2.300	0.9893
0.075	0.5299	0.825	0.7953	1.575	0.9424	2.325	0.9900
0.100	0.5398	0.850	0.8023	1.600	0.9452	2.350	0.9906
0.125	0.5497	0.875	0.8092	1.625	0.9479	2.375	0.9912
0.150	0.5596	0.900	0.8159	1.650	0.9505	2.400	0.9918
0.175	0.5695	0.925	0.8225	1.675	0.9530	2.425	0.9923
0.200	0.5793	0.950	0.8289	1.700	0.9554	2.450	0.9929
0.225	0.5890	0.975	0.8352	1.725	0.9577	2.475	0.9933
0.250	0.5987	1.000	0.8413	1.750	0.9599	2.500	0.9938
0.275	0.6083	1.025	0.8473	1.775	0.9621	2.525	0.9942
0.300	0.6179	1.050	0.8531	1.800	0.9641	2.550	0.9946
0.325	0.6274	1.075	0.8588	1.825	0.9660	2.575	0.9950
0.350	0.6368	1.100	0.8643	1.850	0.9678	2.600	0.9953
0.375	0.6462	1.125	0.8697	1.875	0.9696	2.625	0.9957
0.400	0.6554	1.150	0.8749	1.900	0.9713	2.650	0.9960
0.425	0.6646	1.175	0.8800	1.925	0.9729	2.675	0.9963
0.450	0.6736	1.200	0.8849	1.950	0.9744	2.700	0.9965
0.475	0.6826	1.225	0.8897	1.975	0.9759	2.725	0.9968
0.500	0.6915	1.250	0.8944	2.000	0.9772	2.750	0.9970
0.525	0.7002	1.275	0.8988	2.025	0.9786	2.775	0.9972
0.550	0.7088	1.300	0.9032	2.050	0.9798	2.800	0.9974
0.575	0.7174	1.325	0.9074	2.075	0.9810	2.825	0.9976
0.600	0.7257	1.350	0.9115	2.100	0.9821	2.850	0.9978
0.625	0.7340	1.375	0.9154	2.125	0.9832	2.875	0.9980
0.650	0.7422	1.400	0.9192	2.150	0.9842	2.900	0.9981
0.675	0.7502	1.425	0.9229	2.175	0.9852	2.925	0.9983
0.700	0.7580	1.450	0.9265	2.200	0.9861	2.950	0.9984
0.725	0.7658	1.475	0.9299	2.225	0.9870	2.975	0.9985

Name:____________________Vorname:____________________Matrikel-Nr:____________________Gruppe: B

Teil II:

Bearbeiten Sie 5 der 8 Aufgaben!

1. Assistent T. verläßt jeden Morgen zwischen 7:30 und 8:00 Uhr seine Wohnung, um ins Büro zu fahren. Er benötigt zwischen 20 und 30 Minuten bis zur nächsten Bushaltestelle. (Der tatsächliche Zeitpunkt des Verlassens der Wohnung und die tatsächliche Gehzeit bis zur Bushaltestelle sind Realisierungen von unabhängigen und über dem jeweiligen Intervall gleichverteilten Zufallsvariablen.) Er kann einen der folgenden zwei Busse nehmen: der erste fährt um 8:05 ab und benötigt für die Strecke 35 Minuten, der zweite fährt um 8:25 Uhr ab und benötigt nur 30 Minuten.
   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verpaßt Assistent T. beide Busse?
   (b) Versäumt T. beide Busse so erscheint er an diesem Tag nicht im Büro. An wievielen Arbeitstagen in einem Zeitraum von 3 Jahren (insgesamt 600 Arbeitstage) wird erwartet, daß Assistent T. aus diesem Grund fehlt?
   (c) Berechnen Sie – unter der Bedingung, daß Assistent T. im Büro erscheint – den Erwartungswert seiner Ankunftszeit.
   (d) Assistent W. startet jeden Tag pünktlich um 8:30 Uhr mit dem Fahrrad. Seine Fahrzeit zum Büro unterliegt einer Normalverteilung mit Mittelwert 13 und Varianz 9. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft T. vor W. im Büro ein? (Rechnen Sie auf 2 Nachkommastellen genau!)

2. Eine Fluggesellschaft besitzt Flugzeuge sowohl mit zwei als auch mit vier Triebwerken. Die Wahrscheinlichkeit p für einen Triebwerksausfall sei unabhängig vom Flugzeugtyp für alle Triebwerke gleich. Zudem werde angenommen, daß die Triebwerke unabhängig voneinander ausfallen. Ein Flug kann nur erfolgreich beendet werden, wenn mindestens die Hälfte der Triebwerke eines Flugzeuges noch funktionieren.
   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Flug einer zweimotorigen Maschine bzw. einer viermotorigen Maschine.
   (b) Für welche Werte von p ist ein zweimotoriges Flugzeug vorzuziehen?
   (c) Auf der Fluglinie Augsburg-Dublin werden doppelt soviele zweimotorige als viermotorige Flugzeuge eingesetzt und p sei gleich 0.1.
      i. Welcher Anteil der Flüge wird auf dieser Route erfolgreich beendet?
      ii. Professor U. ist problemlos nach Dublin geflogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er mit einem viermotorigen Flugzeug gereist ist?

3. (a) Seien X und Y zwei unabhängige, auf dem Interval $(0, a)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Dichte von $Z = X/Y$.
   (b) Seien X und Y zwei unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2. Bestimmen Sie die Dichte von $Z = X/Y$.

Name:____________________ Vorname:____________________ Matrikel-Nr:____________________ Gruppe: B

4. Um Schachweltmeister zu werden, muß der Herausforderer mindestens 12,5 Punkte von maximal 24 erreichen. Im Falle eines Gleichstandes von 12:12 bleibt der Titelverteidiger im Amt. In jeder Partie besitzen beide Kontrahenten die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit. Diese Wahrscheinlichkeit ist genau halb so groß wie die Wahrscheinlichkeit für ein Remis.

   (a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion und den Erwartungswert für das Ergebnis einer Partie.

   (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Titelverteidiger seinen Titel behält.

   (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß höchstens 20 Partien ausgetragen werden müssen bis der Champion feststeht.

5. (a) An einem Stab der Länge a werden zufällig und unabhängig voneinander zwei Stellen x und y markiert. An diesen Stellen wird der Stab durchgesägt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit läßt sich aus den so erhaltenen Stücken ein Dreieck bilden?

   (b) Ein Stab der Länge 1 wird zufällig an einer Stelle durchgesägt. Wie groß ist im Mittel

      i. die Länge des kleineren Stückes?

      ii. der Quotient aus der Länge des kleineren Stückes und der Länge des größeren Stückes?

6. Auf n Zellen werden r ununterscheidbare Objekte verteilt, wobei jede mögliche Verteilung als gleichwahrscheinlich angenommen werde.

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau k Zellen unbesetzt bleiben ($0 \leq k \leq n-1$).

   (b) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl von unbesetzten Zellen.

7. Vor der Rektorenwahl an der Universität Augsburg soll eine Umfrage gestartet werden, welcher Anteil p der Universitätsangehörigen die Wahl einer Frau zur Rektorin unterstützen würde. Die Zufallsvariable X bezeichne die Antwort einer Person (1 bedeutet ja/0 bedeutet nein) $(\mathrm{Var}[X] = \sigma^2,\ \mathrm{E}[\mid X - \mathrm{E}[X] \mid^3] = \gamma)$.

   (a) Zeigen Sie, daß die Abschätzung $\gamma \leq 2\sigma^3$ gilt, falls bekannt ist, daß mindestens 30 % eine Rektorin befürworten und mindestens 30 % eine Rektorin ablehnen.

   (b) Wieviele Personen sollten – unter den Gegebenheiten von (a) – befragt werden, damit die Berry-Esséen-Schranke für die Normalapproximation der Verteilung des Stichprobendurchschnitts kleiner oder gleich 0,01 ist?

   (c) Tatsächlich werden 1024 Personen befragt. Geben Sie – unter Verwendung der Berry-Esséen-Schranke – eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, daß der Stichprobendurchschnitt größer als $p+1.96\frac{\sigma}{32}$ ist. Vergleichen Sie dieses Resultat mit einer Anwendung der Chebychev-Ungleichung in diesem Fall.

8. Beim Universitätsball anlässlich der 25-Jahr-Feier der Universität Augsburg enthalten die Eintrittskarten Getränkegutscheine im Wert von $0, 1, 2, \ldots, m-1$ DM. Die Zuordnung des Gutscheinwertes zur Eintrittskarte sei zufällig erfolgt, wobei jede Zahl von $0, 1, \ldots, m-1$ gleichwahrscheinlich sei.

   (a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für den Gutscheinwert einer Eintrittskarte.

   (b) Insgesamt werden n Eintrittskarten verkauft.

      i. Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für den Gesamtwert der Getränkegutscheine.

      ii. Leiten Sie daraus die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gesamtwert der Getränkegutscheine ab.

   (c) Die Universitätsverwaltung beschließt Gutscheine mit maximal 20 DM auszugeben. Welcher Betrag muß im Mittel für die Gutscheine bereitgestellt werden, wenn zum Universitätsball 2000 Personen erwartet werden.