

# K1 Was ist Wahrscheinlichkeit?

## 1.1 Ereignisse

Der einzelne Ausgang ist unbekannt, aber die Menge aller möglichen Ausgänge ist bekannt.

- Elementarereignisse  $\{\omega\}$
- Ereignisraum  $\Omega$   
(Stichprobenraum)
- Ereignis  $A \subseteq \Omega$   
(Ausgang)
- Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$



## Interpretationen

$A \cup B$  Ereignis A oder B tritt ein

$A \cap B$  beide Ereignisse A und B treten ein

$\bigcup_{n=1} A_n$  mindestens eines von  $A_n$  tritt ein

$\bigcap_{n=1} A_n$  alle  $A_n$  treten ein

Zwei Ereignisse A und B sind disjunkt, wenn sie keine Elementarereignisse gemeinsam haben:

$$A \cap B = \emptyset$$



## 1.2 Beispiele

a) Münzen 20-mal werfen

b) Geschlecht des ersten Kinds

c) Fahrzeit von Uni zum Königsplatz

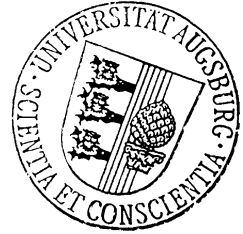
d) Sekunde, wenn ein Tor geschossen wird



## 1.3 Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

Sind die Situationen identisch?

- Kombinatorische Bestimmung  
(Abzählen von Fällen)
- Statistische Schätzungen  
(Wie häufig ist es vorher aufgetreten?)
- Logische Überlegungen  
(Abgeleitet von Struktur)



## 1.4

# Interpretation von Wahrscheinlichkeiten

- Relative Häufigkeit

Es gibt eine unendliche Zahl von identischen Situationen, bei denen ein Ereignis  $A$  auftreten kann. Die Anzahl der  $n$  Versuche, bei denen  $A$  eintritt, heißt die absolute Häufigkeit des Ereignisses  $A$ ,  $h_n(A)$ , und die relative Häufigkeit von  $A$  ist gleich

$$h_n(A)/n$$

Da relative Häufigkeiten, selbst bei noch so großem  $n$ , von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit beliebig weit entfernt sein können, gibt es Probleme.

- Subjektive Wahrscheinlichkeit



## 1.5 Axiome von Kolmogoroff (1933)

Eine Abbildung  $P$  von  $\mathcal{P}(\Omega)$  in  $[0,1]$  heißt Wahrscheinlichkeitsmaß wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

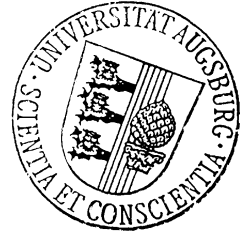
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$  für alle  $A$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$   
wenn  $A, B$  disjunkt sind

$\Omega$  ist eine nicht leere Menge der möglichen Versuchsergebnisse

$\mathcal{F}$  ist die Menge der Ereignisse,  $A_1, A_2, A_3, \dots$  die uns interessieren.

$P(A)$  ist die Wahrscheinlichkeit von  $A$ .

Das Tupel  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  heißt der dem Experiment zugeordnete Wahrscheinlichkeitsraum.

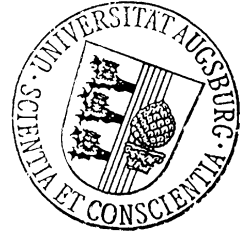


## Beispiel für Kolmogoroff

Werfen eines Würfels

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

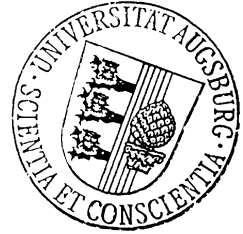
- $P(\text{eine Zahl aus } \{1, \dots, 6\}) = 1$
- $P(\text{Zahl} > 4) = 1/3$   
 $P(\text{ungerade Zahl}) = 1/2$   
 $P(\text{nicht } 2) = 5/6$
- $P(2 \text{ oder ungerade}) = P(2) + P(\text{ungerade})$   
weil 2 und ungerade disjunkt sind



## 1.5.1 Folgerungen aus den Axiomen

Für  $A, B, A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$  gilt

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Aus  $A \subset B$  folgt  $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$   
wobei  $(A \setminus B = A \cap \bar{B})$
- Wenn  $A_i$  disjunkt sind gilt  
$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$$
- Sonst gilt für beliebige  $A_1, A_2, A_3, \dots$   
$$P(\cup A_i) \leq \sum P(A_i)$$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



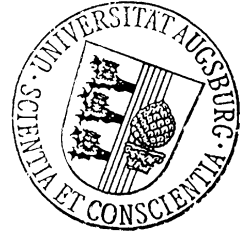
## Folgerungen für das Beispiel

- $P(\leq 4) = 1 - P(> 4)$   
 $2/3 = 1 - 1/3$
- $P(\text{keine Zahl}) = 0$
- $\{2,4\} \subset \{\text{gerade Zahl}\}$   
 $P(2 \text{ oder } 4) \leq P(\text{gerade Zahl})$   
 $1/3 < 1/2$
- $P(\text{gerade Zahl aber nicht } < 3) =$   
 $P(\text{gerade Zahl}) - P(\text{gerade Zahl } < 3)$   
 $1/3 = 1/2 - 1/6$
- Disjunkte Ereignisse  
 $P(3 \text{ oder gerade Zahl}) = 1/6 + 1/2$
- Beliebige Ereignisse  
 $P(2 \text{ oder } 5 \text{ oder } \leq 4) \leq 1/6 + 1/6 + 2/3$
- $P(\text{gerade Zahl oder } \leq 3) =$   
 $P(\text{gerade Zahl}) + P(\leq 3) - P(\text{gerade Zahl } \leq 3)$   
 $5/6 = 1/2 + 1/2 - 1/6$



## 1.6 Ein bisschen Geschichte

- 3500 v.C. Astragli in Ägypten  
(Hufknochen von Schafen)
- 1600 v.C. sechs-seitiger Würfel
- 1565 (?) *Liber de Ludo Aleae*  
(Handbuch des Glückspiels)  
Cardano (1501-1576)
- 1654 Briefwechsel Pascal-Fermat
- 1655 *De ratiocinates in Aleae Ludo*  
(Zur Berechnung von Glückspielen)  
Huygens (1629-1695)
- 1713 *Ars Conjectandi*  
Jakob Bernoulli (1654-1705)
- 1730 *The Doctrine of Chances*  
Abraham de Moivre (1667-1754)



Und...

Galileo Galilei (1564-1642)

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Siméon Poisson (1781-1840)

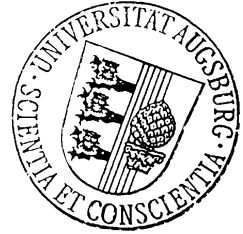
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Pafnuty Chebyshev (1821-1894)

Andrei Markov (1856-1922)

Émile Borel (1871-1956)

Andrei Kolmogorov (1903-1987) löste das  
Wahrscheinlichkeitsteil des sechsten  
Problems von David Hilbert (Paris 1900)



## 1.7 Unabhängigkeit

Ereignisse A und B heißen unabhängig wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A | B) \text{ und } P(B) = P(B | A)$$

$P(A | B)$  ist die Wahrscheinlichkeit von Ereignis A gegeben Ereignis B

Dieses Konzept ist ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Konzept.

z.B.

Beim Werfen eines Würfels

sei A: gerade Zahl und B:  $> 3$

dann gelten  $P(A) = 1/2$  und  $P(A | B) = 2/3$

Sei A: gerade Zahl und B:  $> 2$

dann gelten  $P(A) = 1/2$  und  $P(A | B) = 1/2$



## Stochastische Unabhängigkeit

Wir haben schon die Unabhängigkeit von zwei Ergebnissen besprochen:

$A, B$  unabhängig  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

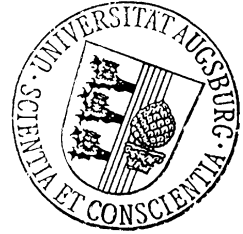
Die Verallgemeinerung ist komplizierter:

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  sind unabhängig

$\Leftrightarrow$

$P(\cap A_j) = \prod P(A_j)$  für jede Teilfamilie

Falls  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$  für jedes Paar  $A_i, A_j$  gelten sollte, sind  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  paarweise unabhängig aber nicht unbedingt unabhängig.



## Beispiel:

Beim zweimaligen Werfen einer Münze:

$$A_1 = \{1. \text{ Wurf Kopf}\}$$

$$A_2 = \{2. \text{ Wurf Zahl}\}$$

$$A_3 = \{\text{Beide verschieden}\}$$

$$P(A_1) = 1/2, P(A_2) = 1/2, P(A_3) = 1/2$$

$$P(A_1 \cap A_2) = 1/4 = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = 1/4 = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = 1/4 = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$\Rightarrow$  jedes Paar  $A_i, A_j$  ist unabhängig

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$\Rightarrow A_1, A_2, A_3$  sind nicht unabhängig