

WEITERE AUFGABEN ZUM ÜBEN
STOCHASTIK I – WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

HILFSMITTEL: A4 BLATT MIT NOTIZEN, TR

Die Prüfung besteht aus zwei Teilen, die insgesamt 300 Punkte ergeben:

Teil 1: Multiple Choice (jede Aufgabe 5 Punkte)

Teil 2: 5 von 8 Aufgaben mit jeweils 50 Punkten

Bitte ankreuzen, welche Aufgaben bewertet werden sollen (5 von 8)!

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	MC	Gesamt
Bewerten:										
Punkte:										

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt oben rechts Ihren Namen!

Viel Erfolg!

Teil 1. Multiple Choice

Zu jeder Frage ist genau eine richtige Antwortmöglichkeit vorgegeben. Tragen Sie Ihre Lösungen in die Kästchen auf der **nächsten** Seite ein. Die Rückseite der Blätter können Sie für Berechnungen sowie zu Anmerkungen und Erläuterungen Ihrer Lösung verwenden.

(1) Sei $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $W = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Die Verteilung von W ist dann

- a) $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n^2})$ b) $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ c) $N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ d) $\chi^2(n)$

(2) Assistent T. hat seinen Kaffee über das einzige Manuskript von Professor U. geschüttet. Obwohl er rettet, was zu retten ist, ist eine Zeile nur noch teilweise zu entziffern:

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow X \text{ hat Dichte } f(x) := \bullet \exp(-\lambda \bullet), E[X] = \int_{\bullet}^{\infty} x \bullet x dx$$

Was stand unter den Flecken:

- (a) $(1 - \lambda), x, 0, F(\bullet)$
(b) $\lambda, x, 0, f(\bullet)$
(c) $\mu, y, -\infty, g(\bullet)$
(d) $\lambda, -x, -\infty, f(\bullet)$

(3) Welche der unten definierten Funktion $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist eine Verteilungsfunktion?

- (a) $F(x) = \min(1, x)$
(b) $F(x) = e^x$
(c) $F(x) = \lfloor x \rfloor$
(d) $F(x) = \frac{1}{2}x$

(4) Was ist beim dreimaligen Würfeln am unwahrscheinlichsten?

- (a) Es fallen nur gerade Augenzahlen.
(b) Es fallen weder gleiche noch benachbarte Augenzahlen.
(c) Die Augensumme ist grösser als 14.
(d) Alle Augenzahlen sind verschieden.

(5) Um welchen Faktor schätzt die Tschebychew-Ungleichung die Wahrscheinlichkeitsmasse des Intervalls $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ einer Normalverteilung zu konservativ?

- (a) die Ergebnisse sind identisch
(b) 2
(c) 5
(d) Die Tschebychew-Ungleichung ist bei Normalverteilung nicht gültig!

Verteilungstabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.000	0.5000	0.750	0.7734	1.500	0.9332	2.250	0.9878
0.025	0.5100	0.775	0.7808	1.525	0.9364	2.275	0.9885
0.050	0.5199	0.800	0.7881	1.550	0.9394	2.300	0.9893
0.075	0.5299	0.825	0.7953	1.575	0.9424	2.325	0.9900
0.100	0.5398	0.850	0.8023	1.600	0.9452	2.350	0.9906
0.125	0.5497	0.875	0.8092	1.625	0.9479	2.375	0.9912
0.150	0.5596	0.900	0.8159	1.650	0.9505	2.400	0.9918
0.175	0.5695	0.925	0.8225	1.675	0.9530	2.425	0.9923
0.200	0.5793	0.950	0.8289	1.700	0.9554	2.450	0.9929
0.225	0.5890	0.975	0.8352	1.725	0.9577	2.475	0.9933
0.250	0.5987	1.000	0.8413	1.750	0.9599	2.500	0.9938
0.275	0.6083	1.025	0.8473	1.775	0.9621	2.525	0.9942
0.300	0.6179	1.050	0.8531	1.800	0.9641	2.550	0.9946
0.325	0.6274	1.075	0.8588	1.825	0.9660	2.575	0.9950
0.350	0.6368	1.100	0.8643	1.850	0.9678	2.600	0.9953
0.375	0.6462	1.125	0.8697	1.875	0.9696	2.625	0.9957
0.400	0.6554	1.150	0.8749	1.900	0.9713	2.650	0.9960
0.425	0.6646	1.175	0.8800	1.925	0.9729	2.675	0.9963
0.450	0.6736	1.200	0.8849	1.950	0.9744	2.700	0.9965
0.475	0.6826	1.225	0.8897	1.975	0.9759	2.725	0.9968
0.500	0.6915	1.250	0.8944	2.000	0.9772	2.750	0.9970
0.525	0.7002	1.275	0.8988	2.025	0.9786	2.775	0.9972
0.550	0.7088	1.300	0.9032	2.050	0.9798	2.800	0.9974
0.575	0.7174	1.325	0.9074	2.075	0.9810	2.825	0.9976
0.600	0.7257	1.350	0.9115	2.100	0.9821	2.850	0.9978
0.625	0.7340	1.375	0.9154	2.125	0.9832	2.875	0.9980
0.650	0.7422	1.400	0.9192	2.150	0.9842	2.900	0.9981
0.675	0.7502	1.425	0.9229	2.175	0.9852	2.925	0.9983
0.700	0.7580	1.450	0.9265	2.200	0.9861	2.950	0.9984
0.725	0.7658	1.475	0.9299	2.225	0.9870	2.975	0.9985

Teil 2.

Bearbeiten Sie 5 der 8 Aufgaben!

1. COMPUTERVIRUS

Ein Computervirus infiziert den Uniserver. So werden an alle Studenten 4 e-mails verschickt. Diese e-mails enthalten mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.65$ wiederum Computerviren. Da es sich um einen besonders gemeinen Virus handelt, enthalten die e-mails an die Studenten 1, 2, 3 oder 4 unterschiedliche Viren. Die Wahrscheinlichkeit dafür j Viren in einer e-mail zu erhalten ist $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.25$, $p_3 = 0.14$ und $p_4 = 0.01$, für $j = 1, 2, 3, 4$.

Alle Studenten öffnen ihre e-mail.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitserzeugendefunktion für die Anzahl Viren, die Student A nun auf seinem Computer hat.
- (b) Wie hoch ist die erwartete Anzahl von Viren auf dem Computer von Student A?
- (c) Berechnen Sie die dazugehörige Varianz.

2. KÖRPERGRÖSSE

Beim letzten Besuch beim Kinderarzt bekommt Dr. T. eine Prognose für die erwartete Größe seiner Kinder. Demnach wird erwartet, dass Sohn S. 205cm groß wird mit einer Standardabweichung von 10cm, und Tochter A. 187cm mit einer Standardabweichung von 7cm.

Setzen Sie zunächst **keine** Verteilung voraus! Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab für

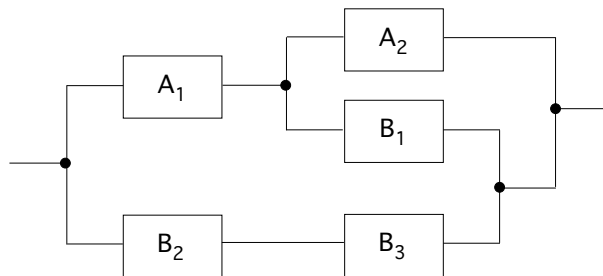
- (a) A. größer als 194cm?
- (b) S. mehr als 10cm größer als A.?

Setzen Sie nun eine sinnvolle Verteilung voraus! Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird

- (c) A. größer als S.?
- (d) S. seinen Vater (202cm) und A. ihre Mutter (185cm) übertreffen.

3. SCHALTKREIS

In einem Schaltkreis sind Bauteile vom Typ A und B verbaut.



Ein Bauteil vom Typ A fällt mit 10% Wahrscheinlichkeit aus, die vom Typ B mit einer Wahrscheinlichkeit von 5%. Die Auffallereignisse der Bauteile seien voneinander unabhängig.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt der gesamte Schaltkreis aus?

4. RAUCHVERBOT

In einer Umfrage an der Uni werden 20 Studenten und 16 Studentinnen gefragt, ob sie die neuen Rauchverbotregeln für richtig halten. Unter den Annahmen, dass 70% aller Studenten und 80% aller Studentinnen 'Ja' sagen würden, und dass eine zufällige Stichprobe gezogen worden ist:

- (a) Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 30 der Befragten 'Ja' sagen.
- (b) Wie kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass mehr Frauen als Männer 'Ja' sagen?

Im gespeicherten Umfragedatensatz wird das Geschlecht nicht aufgenommen.

- (c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die 'Ja' gesagt hat, eine Studentin war?

5. KOMBINATIONEN VON ZUFALLSVARIABLEN

Die Zufallsvariablen X und Y haben die Dichten $f_X(x)$ $x \geq 0$ bzw. $g_Y(y)$ $y \geq 0$.

(a) Was ist die Dichte von $Z = X + Y$, wenn X und Y unabhängig voneinander sind?

Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ und Y exponentialverteilt mit Parameter μ ,

(b) Was ist die Dichte von $W = 2 * X + Y$?

(c) Was ist die Verteilungsfunktion von $V = X * Y$?

6. ENTEN

Jedes Jahr brühten zwei Enten auf einem Balkon der Mathematik. Die Zahl der Eier, die jede Ente legt ist poissonverteilt. Im Durchschnitt legt Ente 1 λ_1 und die Ente 2 λ_2 Eier.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ente 1 mehr Eier als Ente 2 legt? Wie groß die, dass beide Enten gleichviele Eier legen?

Die Enten sind sich so ähnlich, dass man sie nicht auseinanderhalten kann. Wir interessieren uns für eines der Nester. Mit Wahrscheinlichkeit $p=0.6$ sitzt Ente 2 auf dem Nest (sei dabei $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$).

- (b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem Nest 2 Eier liegen?

Durch Zufall gibt es in jeder Entengeneration einige gelbe Entenküken, wobei die restlichen Küken braun sind. Durchschnittlich sind 2 von 100 geschlüpften Küken gelb. Eine der Enten hat 10 Eier gelegt.

- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Küken gelb sind?
(d) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 4 der Küken gelb sind?

7. MÜNZEN

Betrachten Sie folgendes Zufallsexperiment: Eine faire Münze mit den Symbolen “Zahl” und “Wappen” wird höchstens dreimal geworfen. Wird im ersten Wurf “Wappen” geworfen, wird die Münze ein zweites Mal geworfen. Bei “Zahl” wird sie kein zweites Mal geworfen. Wird dann im zweiten Wurf “Wappen” geworfen, wird die Münze ein drittes Mal geworfen. Bei “Zahl” wird sie kein drittes Mal geworfen. Die Zufallsvariable $X_1 \in \{0; 1; 2; 3\}$ beschreibe die Anzahl der geworfenen Symbole “Wappen”.

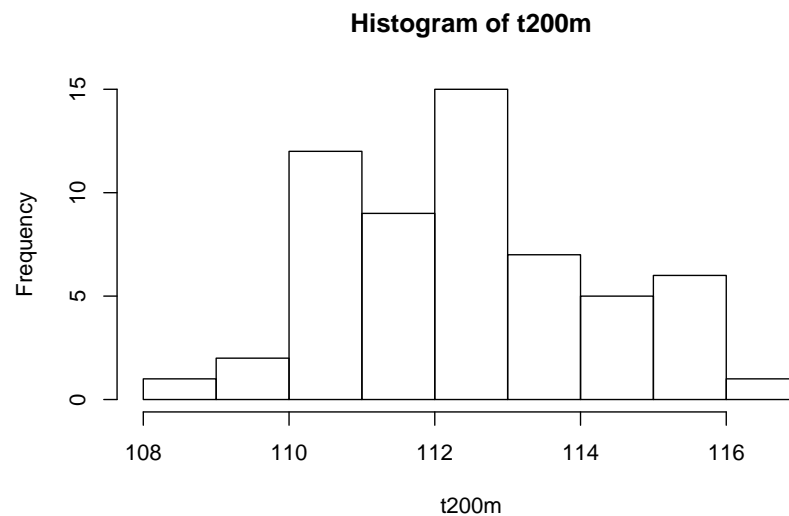
- (a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_1 .
- (b) Zeigen Sie: $E[X_1] = \frac{7}{8}$.
- (c) Bestimmen Sie die Varianz von X_1 .
- (d) Das obige Zufallsexperiment wird nun n -mal in unabhängiger Folge durchgeführt. Die Zufallsvariable X_j bezeichne die Anzahl der beim j -ten Experiment (insgesamt) geworfenen Symbole “Wappen”. Ferner sei $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$ die Gesamtzahl aller geworfenen Symbole “Wappen”.
 - i Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_n .
 - ii Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq n)$.

8. R CODE UND OUTPUT

In einer Studie über Schwimgeschwindigkeiten sind die Zeiten in der japanischen Meisterschaft über 200m für Männer im Jahr 2004 untersucht worden. Insgesamt gab es 58 Beobachtungen für 34 Schwimmer. Alle Schwimmer haben an einem Vorlauf (Preliminary) teilgenommen und die besten 16 sind im Halbfinale (Semi-final) geschwommen. Im Finale (Final) schwammen die besten 8 aus dem Halbfinale.

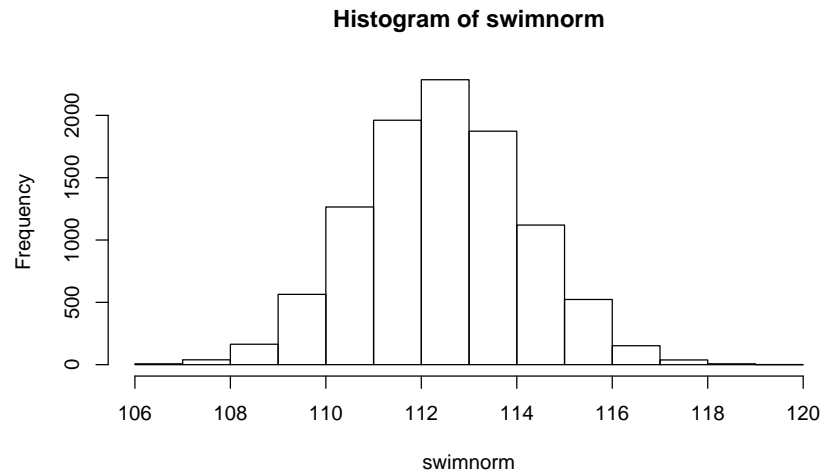
Erläutern Sie den folgenden Code und Output in R.

```
> summary(t200m)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 108.9  111.0   112.4   112.4   113.6   116.1
> JavaGD()
> hist(t200m)
```

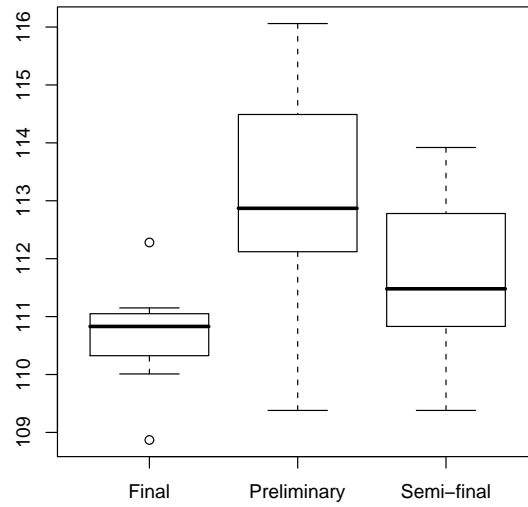


```
> mean(t200m)
[1] 112.4402
> sd(t200m)
[1] 1.732492
> 1-pnorm(116,mean(t200m),sd(t200m))
[1] 0.01995186
> 1-pnorm(108,mean(t200m),sd(t200m))
[1] 0.9948096
```

```
> swimnorm<-rnorm(10000,mean(t200m),sd(t200m))
> JavaGD()
> hist(swimnorm)
```



```
> table(RaceCategory)
RaceCategory
      Final Preliminary Semi-final
         8          34          16
> tapply(t200m,RaceCategory,mean)
      Final Preliminary Semi-final
110.6950 113.2038 111.6900
>
> JavaGD()
> boxplot(t200m~RaceCategory)
```



```
>JavaGD()
> plot(t100m,t200m,pch=19)
```

