Prof. Dr. Antony Unwin, Dr. Ali Ünlü
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie (WS 2008/09)

Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch 14. Januar 2009, bis spätestens 12.00 Uhr; Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Sei $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$, und seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch $U(0, \theta)$-verteilte Zufallsvariablen. Man zeige:
$$\max\{X_1, \dots, X_n\} \xrightarrow[i.W.]{} \theta$$
(i.W.: in Wahrscheinlichkeit).

2. In einer privaten Versteigerung werden zwei Kisten Chateau Petrus 1993 angeboten. Angebote müssen vertraulich eingereicht werden, und die zwei höchsten werden je eine Kiste zu dem durchschnittlichen Preis der zwei Angebote bekommen. Es werden insgesamt m Angebote eingereicht.
   (a) Wenn alle Angebote als unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte f (bzw. Verteilungsfunktion F) angesehen werden können, was ist der Erwartungswert für das höchste Angebot? Drücken Sie hierbei den Erwartungswert als Funktion von f und F aus.
   (b) Gegeben man selbst hat w geboten, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das eigene Angebot keinen Erfolg hat?

3. Sei X eine standard-normalverteilte Zufallsvariable und δ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass $Y = (X + \delta)^2$ auf $(0, \infty)$ die Dichte
$$\rho(y) = (2\pi y)^{-\frac{1}{2}} e^{-(y+\delta^2)/2} \cosh(\delta\sqrt{y})$$
hat.

4. Die Leistung eines Speerwerfers werde mit einer Exponentialverteilung mit Parameter λ_1 modelliert. Die Einnahme gewisser Medikamente steigert seine Leistungsfähigkeit, so daß seine Leistung dann mit einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_2 < \lambda_1$ modelliert werden kann. Aus Angst vor Dopingkontrollen nimmt der Sportler nur mit Wahrscheinlichkeit p vor einem Wettkampf diese Medikamente ein. Bei einem Wettkampf erzielt der Sportler eine neue Rekordweite, indem er die alte Bestmarke von x_0 Metern übertrifft.
   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nahm er vor dem Wettkampf leistungssteigernde Präparate ein? Drücken Sie hierbei diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von λ_1, λ_2, x_0 und p aus.
   (b) Plotten Sie in `R` die Wahrscheinlichkeit aus vorheriger Teilaufgabe (a) für jeweils $p = 0.10, 0.25, 0.50, 0.75$ und 0.90 gegen die Weite x_0 bei Parametern $\lambda_1 = 0.020$ und $\lambda_2 = 0.015$ (d.h. als Funktion von x_0).

5. Die britische Nuklearindustrie muß sicherstellen, daß ihre Anlagen Klimaextremen wiederstehen können, die in einem Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.0001 auftreten mögen. Zwei Extremwertverteilungen sind vorgeschlagen worden: Eine Gumbel mit Verteilungsfunktion $G(x) = exp(-exp(-x))$ und eine Fréchet mit Verteilungsfunktion $G(x) = exp(-(1 + 0.05x)^{-20})$. Plotten Sie in `R` diese Verteilungen für $x > 2$. Wo liegt ungefähr der maximale Unterschied zwischen diesen Verteilungen? Plotten Sie in `R` den Unterschied als Funktion von x.