Prof. Dr. Antony Unwin, Dr. Ali Ünlü
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie (WS 2008/09)
Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch 12. November 2008, bis spätestens 12.00 Uhr; Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit

$$P(X = 3^{-i}) = \frac{c}{3^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

   (a) Bestimmen Sie die Konstante c, so dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert wird.
   (b) Berechnen Sie $P(X < 0.05)$, $P(X \geq \frac{2}{3^6})$ und $P(0.008 \leq X < 0.23)$.
   (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.
   (d) Bestimmen Sie die Varianz von X.
   (e) Zeigen Sie hier auf direkte Weise, dass $E(aX + b) = aE(X) + b$ und $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$ (a, b reelle Zahlen) gelten.

2. Die Größe von Waldbränden werde mit positiven ganzen Zahlen $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ klassifiziert. Ihre Verteilung sei

$$P(\text{Größe} = s) = 0.5^s.$$

   Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Waldbrand entdeckt wird, hängt von der Größe des Brandes ab:

$$P(\text{entdeckt}|\text{Größe} = s) = 1 - \kappa \cdot 0.6^s.$$

   (a) Zeigen Sie, dass mit obigem ersten Ausdruck eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert ist. Welche Werte für κ sind im zweiten Ausdruck möglich? Interpretieren Sie die beiden Parametrisierungen. Was würde der zweite Ausdruck im Fall der Setzung $\kappa := 0$ besagen?
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Waldbrand größer als $s_0 \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ klassifiziert wird, unter der Bedingung, daß er entdeckt worden ist?

3. Es wird angenommen, daß die Zahl der Unfälle für eine Person Poisson-verteilt ist, aber für jede Person mit einem anderen Parameter. Eine Person A habe im Durchschnitt $\lambda_A = 2$ Unfälle pro Jahr, eine andere Person B im Durchschnitt $\lambda_B = 4$ Unfälle pro Jahr. Welche Anzahlen von Unfällen pro Jahr sind für diese Personen am wahrscheinlichsten? (Beurteilen Sie in den nachfolgenden Teilaufgaben das Ganze bis zu jeweilig geeigneten Stellen.)

   (a) Machen Sie sich bitte die Mühe und berechnen sie das Ganze per Hand.
   (b) Studieren Sie die `R`-Hilfeseite zur Funktion `dpois()` und berechnen Sie das Ganze in `R`. Erstellen Sie Säulendiagramme der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur graphischen Beurteilung.
   (c) Für welche Anzahl(en) von Unfällen pro Jahr ist die absolute Differenz der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für die Personen A und B am größten?

(d) Für welche Anzahlen von Unfällen pro Jahr ist die Dichte der Gesamtanzahl von Unfällen pro Jahr für beide Personen (Unabhängigkeit angenommen) kleiner als die Dichte der Anzahl von Unfällen pro Jahr für Person B evaluiert an der Stelle 6? Benutzen Sie `R`, um sich einen Überblick zu verschaffen, und begründen Sie dann Ihre Antwort mathematisch (Beweis z.B. durch Induktion).

4. Verkehrssünder U., der die Blutgruppe AB hat (5% der Bevölkerung haben diese Blutgruppe), behauptet vor Gericht, seine Blutprobe sei verwechselt worden (dies passiert in 5% der Fälle) und verlangt eine Blutgruppenuntersuchung (welche zu 100% zweifelsfrei ist). Diese ergibt eine Übereinstimmung seiner Blutgruppe mit der der Blutprobe. Das Gericht sieht ihn als überführt an, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine Verwechslung, nachdem die Gleichheit der Blutgruppen festgestellt worden ist, kleiner als 10^{-2} ist. Wird Herr U. verurteilt?

5. Durch eine Chromosom-Mutation entsteht (totale) Farbenblindheit in durchschnittlich einer pro 100.000 Personen. In München gibt es dieses Jahr 20.000 Geburten. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass:

   (a) Kein Fall von Farbenblindheit auftritt?

   (b) Mindestens ein Kind farbenblind ist?

   (c) Nicht mehr als drei Fälle von Farbenblindheit auftreten?

   Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeiten sowohl "exakt" als auch approximativ. Welche Verteilungen werden hierbei benutzt? Vergleichen Sie die exakten und approximativen Werte.