Prof. Dr. Antony Unwin, Dr. Ali Ünlü
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie (WS 2008/09)
Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch 3. Dezember 2008, bis spätestens 12.00 Uhr; Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
   (a) $P(j < X \leq j+1)$, für $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$;
   (b) $P(X > s)$ für $s > 0$;
   (c) $P(X > s+t | X > s)$ für $s, t > 0$;
   (d) Falls $\alpha = P(X > s)$ gesetzt ist, so drücke man den Parameter λ durch die Größen α und s aus.

2. Laden Sie den Datensatz `Erdbeben` in `R`. Der Datensatz beschreibt die Zeit (in Tagen) zwischen aufeinanderfolgenden Aufzeichnungen von Erdbeben. Dabei wurden Erdbeben weltweit betrachtet, und es wurden diejenigen Erdbeben aufgenommen, die eine Stärke größer als 7.5 auf der Richterskala aufwiesen oder bei denen über $1\,000$ Menschen getötet wurden. Aufzeichnungen starteten am 16. Dezember 1902 und endeten am 4. März 1977. Es gab insgesamt 63 Erdbeben; in dem Datensatz sind die 62 "Wartezeiten" zwischen aufeinanderfolgenden Erdbeben notiert. [Quelle: The Open University (1981). S237 *The Earth: Structure, Composition and Evolution*. Milton Keynes, The Open University Press.]
   (a) Erstellen Sie ein Histogramm der Wartezeiten. Was fällt auf? Welche Verteilung(en) wäre(n) hier denkbar?
   (b) Bestimmen Sie die mittlere Wartezeit zwischen aufeinanderfolgenden Erdbeben. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, irgendwo auf dieser Welt an irgendeinem Tag ein Erdbeben zu beobachten?
   (c) Gehen Sie von der geometrischen Verteilung aus. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für mehr als 5 Jahre (inklusive einem Schaltjahr) kein Erdbeben irgendwo auf dieser Welt eintritt? Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der relativen Häufigkeit der Wartezeiten (in den Daten), die größer als 5 Jahre sind? Erklären Sie warum diese Wahrscheinlichkeit so gering ist?

3. *Fortsetzung 1 von Aufgabe 2.* Die durchschnittliche Rate für das Auftreten eines Erdbebens sei 437 Tage (vgl. Aufgabe 2). Behandeln Sie unter Annahme der Exponentialverteilung folgende Teilaufgaben:
   (a) Welcher Wert ergibt sich für den Parameter λ der Exponentialverteilung (begründen Sie)? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Erdbeben in den Jahren 2009, 2010 und 2011 weltweit eintritt.
   (b) Berechnen Sie die "Median-Wartezeit" zwischen aufeinanderfolgenden Erdbeben.
   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man länger als die mittlere Wartezeit warten muss bis ein Erdbeben eintritt? Welchen Prozentsatz machen diese Wartezeiten aus?

4. *Fortsetzung 2 von Aufgabe 2.* Betrachten Sie die "Wahrscheinlichkeit dafür, für mehr als x Tage kein Erdbeben zu beobachten (unter dem geometrischen Modell)" idealisiert als Funktion von x auf der nicht-negativen reellen Achse. Plotten Sie diese Funktion in `R`.

5. Studieren Sie die `R`-Hilfeseite zur Funktion `sample()`. Lassen Sie den Computer $3\,000$ mal würfeln. Erfassen Sie bei jedem Wurf, ob eine Sechs gewürfelt wurde oder nicht. Berechnen Sie außerdem nach jedem Wurf die Größen $D(n)$ und $R(n)$, wobei $D(n)$ die Differenz der tatsächlich im Experiment bis zum n-ten Wurf gewürfelten Sechsen und der erwarteten Anzahl Sechser bis zum n-ten Wurf ist, und $R(n)$ die Abweichung der relativen Häufigkeit der Sechs nach dem n-ten Wurf vom theoretischen Wert ist. Plotten Sie die Funktionen $D(n)$ und $R(n)$ gegen $n = 1, 2, \ldots, 3\,000$. Beschreiben Sie das langfristige Verhalten dieser Funktionen.