Prof. Dr. Antony Unwin, Dr. Ali Ünlü
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
http://stats.math.uni-augsburg.de/

Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie (WS 2008/09)
Übungsblatt 8

Abgabe: Mittwoch 10. Dezember 2008, bis spätestens 12.00 Uhr; Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Sei X eine Zufallsvariable mit existierender momenterzeugenden Funktion $M_X(t)$. Beweisen bzw. bearbeiten Sie die nachfolgenden Teilaufgaben.

   (a) Für das k. Moment ($k \in \mathbb{Z}^+$) gilt:
   $$E(X^k) = M_X^{(k)}(0).$$

   (b) Für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
   $$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at) = e^{bt} M_{aX}(t).$$

   (c) Leiten Sie die momenterzeugende Funktion einer Exponentialverteilung mit dem Parameter λ her. Welche Form hat diese, für welche Argumente t ist sie überhaupt definiert?

2. Seien X und Y unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen: $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

   (a) Leiten Sie ganz allgemein die charakteristische Funktion zur Normalverteilung her.

   (b) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von $X + Y$ und identifizieren Sie die Verteilung. Welche Eigenschaften einer charakteristischen Funktion sind hierbei zentral?

   (c) Zeigen Sie, unter Benutzung der charakteristischen Funktion, dass für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z gilt:
   $$\begin{aligned} E(Z^k) &= 0 \quad \text{für k ungerade,} \\ E(Z^k) &= (k-1) \cdot (k-3) \cdot \ldots \cdot 1 \quad \text{für k gerade.} \end{aligned}$$

3. (a) Veranschaulichen Sie in R die Aussage des Gesetzes der großen Zahlen (Konvergenz in Verteilung; siehe Abschnitt 12.1 im Vorlesungsskript) für den Fall, dass $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch $N(\mu = 3, \sigma^2 = 12)$-verteilte Zufallsvariablen sind. D.h. man bestätige anhand geeigneter Plots, dass die Folge der Zufallsvariablen $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ in Verteilung gegen 3 konvergiert.

   (b) Plotten Sie in R die Funktionen
   $$f_a(x) = f(x)\,(1 + a\sin(2\pi \log_e(x))) \qquad (x > 0)$$
   für $a = -0.5, -0.1, 0, 0.1, 0.5$, wobei $f(x)$ die Dichte der Lognormalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ ist (siehe Abschnitt 10.1.1 im Vorlesungsskript).

4. Eine völlig überarbeitete Ausgabe der "Encyclopedia of Statistical Sciences" wurde gesetzt. Sie hat nun 10 000 Seiten. Pro Seite sei die Anzahl der Fehler, die die Korrekturleser finden, unabhängig Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda = 0.5$.

   (a) Man bestimme "näherungsweise" die Wahrscheinlichkeit dafür, mehr als 4 500 und weniger als 5 500 Fehler zu finden, mit

      i. der Tschebychew Ungleichung,

      ii. dem zentralen Grenzwertsatz.

   (b) In welchem Intervall liegt "näherungsweise" mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die Anzahl der gefundenen Fehler, wenn Sie von einer Normalverteilung ausgehen und ein symmetrisches Intervall um den Erwartungswert legen?

5. Die Anzahl Tore einer Mannschaft in einem Eishockeyspiel wird annähernd als Poisson-verteilt angenommen, unabhängig von der gegnerischen Mannschaft. Nehmen Sie an, dass zwei Mannschaften mit durchschnittlichen Torraten pro Spiel von λ_1 bzw. λ_2 gegeneinander spielen. Erkundigen Sie sich in den Medien und benutzen Sie im Folgenden für λ_1 und λ_2 gegenwärtige durchschnittliche Torraten bzw. Gegentorraten für die Augsburger Mannschaft.

   Bearbeiten Sie, soweit möglich, in `R` die nachfolgenden Teilaufgaben.

   (a) Simulieren Sie 1000 Spiele und stellen Sie die Verteilung der Torunterschiede in einer Graphik dar. (Hierbei soll "Unentschieden" erlaubt sein.)

   (b) Eine Hälfte der Spiele wird zuhause ausgetragen, die andere Hälfte auswärts. Nehmen Sie an, dass der Heimvorteil 0.5 Tore beträgt, so dass die Heimmannschaft im Durchschnitt 0.25 Tore mehr schiesst und die Auswärtsmannschaft 0.25 Tore weniger. Wie sieht die Verteilung der Torunterschiede für 1000 Spiele jetzt aus?

   (c) Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den tatsächlichen Ergebnissen der Augsburger Mannschaft.

   (d) Wie könnten Verlängerungen simuliert werden?