



Prof. Dr. Antony Unwin, Dr. Ali Ünlü
Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
<http://stats.math.uni-augsburg.de/>

Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie (WS 2008/09)

Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch 17. Dezember 2008, bis spätestens 12.00 Uhr; Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie

- Führen Sie theoretisch aus, warum die folgenden Anwendungen in Abschnitt 12.3 des Vorlesungsskripts aus dem zentralen Grenzwertsatz folgen:
 - Falls X binomialverteilt ist mit den Parametern N und p , so gilt für hinreichend großes N , dass X annähernd normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = Np$ und $\sigma^2 = Np(1-p)$.
 - Falls X Poisson-verteilt ist mit dem Parameter λ , so gilt für hinreichend großes λ , dass X annähernd normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = \lambda$ und $\sigma^2 = \lambda$.
- Vervollständigen Sie den Beweis in Abschnitt 12.4.1 im Vorlesungsskript zur Aussage, dass aus der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit die Konvergenz in Verteilung folgt. Bearbeiten Sie hierzu die nachfolgenden Teilaufgaben.
 - Zeigen Sie, dass $F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon)$ (obere Schranke für $F_n(x)$).
 - Zeigen Sie, dass $F(x - \epsilon) \leq F_n(x) + P(|X_n - X| > \epsilon)$ (untere Schranke für $F_n(x)$).
 - Zeigen Sie, dass $F(x - \epsilon) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(x + \epsilon)$.
 - Begründen Sie warum daher mathematisch die genannte Implikation gilt.
- Simulieren Sie in \mathbb{R} jeweils 100, 1.000 und 10.000 unabhängige Realisationen einer Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda = 2$. Überprüfen Sie das asymptotische Verhalten des Stichprobenmittels $\frac{1}{n} \sum X_i$ bezüglich der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen $\lambda = 2$, indem Sie die obigen drei Simulationsfälle 100 mal wiederholen und die Ergebnisse in geeigneter Weise graphisch darstellen.
 - Belegen Sie Ihre Simulationsbeobachtungen aus vorheriger Teilaufgabe (a) in Theorie. Welche Ungleichung kann hierbei herangezogen werden (begründen Sie)? Welcher Grenzwertsatz garantiert stochastische Konvergenz gegen $\lambda = 2$ (prüfen Sie jeweils die Voraussetzungen)?
 - Welche Grenzwertsätze wären auch anwendbar? Welche asymptotischen Aussagen würden diese im vorliegenden Beispiel ergeben?
- Als angesehene/r Wissenschaftler/in sind Sie gebeten worden, dem Fernsehpublikum einige Wahrscheinlichkeitsaussagen zu erklären. Wie würden Sie die nachfolgenden Aussagen erläutern?
 - Obwohl wir bereits letztes Jahr eine "Jahrhundertflut" hatten, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir auch dieses Jahr von einer Flut betroffen werden, unverändert.
 - Der durchschnittliche Alkoholkonsum deutscher Bürger wird mit Hilfe einer Umfrage an 100 Menschen ermittelt. Würde die Umfrage bei 400 Menschen durchgeführt, so wären die Resultate zweimal, nicht viermal, besser.
 - Das starke Gesetz der großen Zahlen besagt, daß wir, wenn wir genügend vielen Menschen dieselbe Frage stellen, im Durchschnitt nur dieselbe Antwort bekommen.

5. Für unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n existiere der Erwartungswert $E(X) = \mu$ und die Varianz $V(X) = \sigma^2 > 0$, und es gelte $E(|X - \mu|^3) < 2\sigma^3$.
- (a) Wie groß muß eine Stichprobe mindestens sein, damit die Berry-Esséen Schranke für die Normalapproximation der Verteilung des standardisierten Stichprobenmittels kleiner oder gleich 0.05 ist?
 - (b) Falls die Stichprobengröße 625 beträgt, geben Sie eine auf der Berry-Esséen Schranke basierende Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit an, daß das Stichprobenmittel größer als $1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{25}} + \mu$ ist.
 - (c) Vergleichen Sie das Resultat aus vorheriger Teilaufgabe (b) mit dem Ergebnis, das sich aus einer Anwendung der Tschebychew Ungleichung ergibt.